MATEMÁTICA

Questão 1

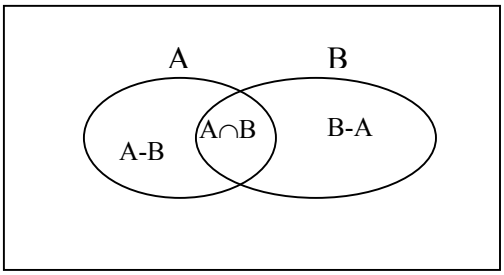
A) O número de candidatos com nota menor que 4 é exatamente o número de elementos do complementar de A definido acima, ou seja, queremos encontrar $\#(A^C)$. Como $\Omega = A \cup A^C$, temos

$$3000 = \#\Omega = \#(A \cup A^C) = \#A + \#(A^C) - \#(A \cap A^C) = 2300 + \#(A^C) - 0 \Rightarrow \#(A^C) = 700$$

O zero que aparece na expressão acima é referente a $\#(A \cap A^C)$, pois nenhum candidato pode ter tirado uma nota menor que 4 e maior ou igual a 4 simultaneamente.

Portanto, o número de candidatos com notas inferiores a 4 é 700.

Outra solução:
A)
Sejam: N→ número de candidatos que fizeram a prova
A→ conjunto dos candidatos que obtiveram notas superiores ou iguais a 4,0;
B→ conjunto dos candidatos que obtiveram notas inferiores ou iguais a 6,0.



Do diagrama acima, temos: N=3000, e o número de candidatos que têm nota menor que 4,0 é dado por $n(B - A) = n(A \cup B) - n(A) = 3000 - 2300 = 700$.
Assim, existem 700 candidatos com nota inferior a 4,0.

B) O que este subitem pede é o número de elementos do conjunto

$$C = \{\text{todos os candidatos que tiveram notas} \geq 4 \text{ e} \leq 6\}.$$

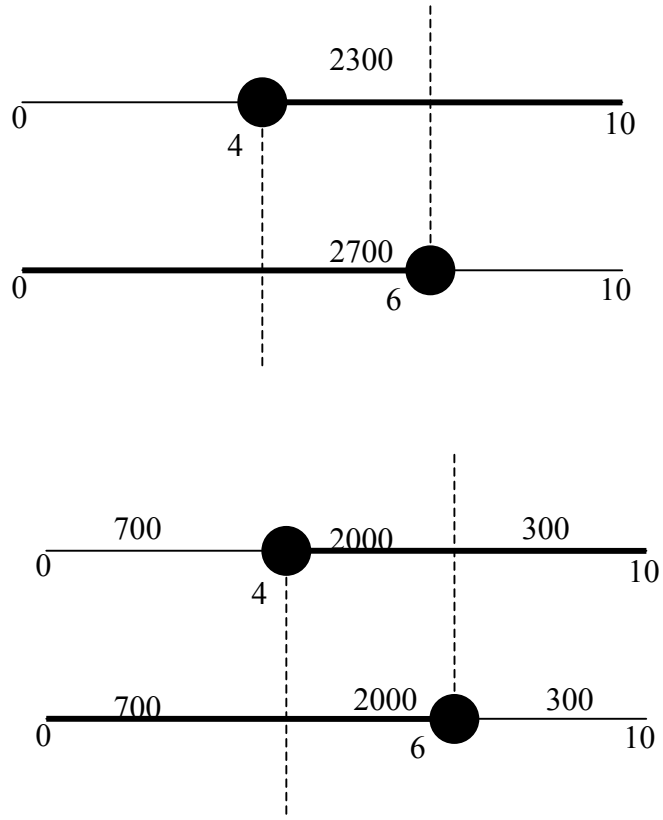
Note que este conjunto nada mais é que a intersecção dos conjuntos A e B definidos no início da questão. Note também que a união de A e B é igual ao conjunto universo Ω. Como C = A∩B, então

$$3000 = \#\Omega = \#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B) = 2300 + 2700 - \#(A \cap B) \Rightarrow \#(A \cap B) = 2000.$$

Portanto, o número de candidatos com notas maiores ou iguais a 4 e menores ou iguais a 6 é 2000.

B) Outra forma de resolver (menos formal):

Considerando o desenho abaixo e sabendo que, distribuídos ao longo das notas, temos 3000 candidatos, podemos construir outro desenho, completando(3000) com as notas menores que 4 e maiores que 6.



Portanto,

A) O número de candidatos com notas menores que 4 é 700.

B) O número de candidatos com notas maiores ou iguais a 4 e menores ou iguais a 6 é 2000.

Outra solução possível:

A) Um candidato não pode, ao mesmo tempo, ter nota maior ou igual a 4,0 e menor que 4,0. Como 3000 candidatos fizeram a prova e 2300 tiraram notas maiores ou iguais a 4,0, o número de candidatos que tiraram notas menores que 4,0 é igual a $3000 - 2300 = 700$.

B) Se 700 candidatos tiveram notas menores que 4,0 e 2700 tiveram notas menores ou iguais a 6,0, o número de candidatos que tiveram notas maiores ou iguais a 4,0 e menores ou iguais a 6,0 é dado por: $2700 - 700 = 2000$.

Questão 2

A) Gastos totais = 100,00 + 50,00 = 150,00

Preço de venda de cada peça = 1,50

x = nº de peças vendidas

y = lucro da venda dessas x peças.

V = valor investido na confecção das peças = 150,00

y = lucro de 50% sobe V = 75,00

Assim, 150,00 + 75,00 = 225,00

Logo, para obter uma receita de 225,00, é preciso vender x peças, onde

$x = \frac{225,00}{1,50} = \frac{2250}{15} = 150.$

Portanto, o fabricante tem que vender 150 peças para obter um lucro de 75%.

Outra solução:
A)

O candidato pode responder primeiro ao item “b”, encontrando y = 1,5 x – 150,00. Para responder ao item “a”, ele substitui y = 75,00 na expressão encontrada, isto é, 75,00 = 1,5 x – 150,00, **obtendo x = 150 peças**.

B) O Lucro (y) do fabricante é dado por Receita (R) menos os Gastos (G), ou seja, y = R – G.
O gasto G é dado pela soma dos gastos em matéria-prima e mão-de-obra, ou seja, 100,00 + 50,00 =150,00.
A receita é dada pelo produto do preço de cada peça (1,50) pela quantidade de peças vendidas (x).

Assim, para obter o lucro (y) em função da quantidade (x) de peças, temos que y = 1,5x – 150.

Outras soluções:
B)
Admitindo-se que o modelo matemático para esse problema é linear e usando-se um par de pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2), onde x é quantidade de peças e y é receita, pode-se obter a expressão solicitada, das seguintes maneiras:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x1 & y1 & 1 \\ x2 & y2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{ou} \qquad y - y1 = \frac{y1 - y2}{x1 - x2}(x - x1)$$

Em ambos os casos, obtém-se **y = 1,5x – 150,00.**

Questão 3

Para criar uma referência, suponha que, de um lado da ponte, marquemos o ponto 0 e, do outro lado da ponte, o ponto 840. Suponha que, do lado esquerdo, esteja o carro que se desloca mais lento e, do lado direito, o carro que se desloca mais rápido. Dessa forma, o tempo gasto para que o carro da esquerda percorra 30m é o mesmo tempo em que o outro carro percorre 40m. Ou seja, podemos supor que a distância percorrida no tempo pelo carro 1 é 30t, enquanto a do carro 2 é 40t.

Dessa forma à medida que a posição do carro 1 vai crescendo na ponte, a do carro 2 decresce.
Posição do carro 1 na ponte, no tempo = 30t
Posição do carro 2 na ponte, no tempo = 840 - 40t

A) Quando os carros se encontrarem, eles estarão na mesma posição, ou seja,

$$30t = 840 - 40t \Rightarrow 70t = 840 \Rightarrow t = 12$$

No tempo t = 12, eles se encontrarão, entretanto, nesse tempo, o carro 1 estará na posição 30.12 = 360.
Portanto, eles se cruzam a 420 – 360 = 60 m do meio da ponte.

B) O tempo gasto para que o carro mais rápido cruze a ponte, isto é, saia da posição 840 para a posição 0, é,

$$840 - 40t = 0 \Rightarrow 40t = 840 \Rightarrow t = 21.$$

Nesse mesmo tempo, a posição do carro mais lento será 30.21 = 630, faltando, dessa forma, para atravessar a ponte, 840 – 630 = 210m.

Q.3) Outra solução:
O candidato que apresentar a tabela abaixo, ou outra equivalente, pode responder, sem qualquer outra argumentação, ao que se pede.

Posição do carro lento	Posição do carro rápido
0	840
30	800
60	760
90	720
120	680
150	640
180	600
210	560
240	520
270	480
300	440
330	400
360	360
390	320
420	280
450	240
480	200
510	160
540	120
570	80
600	40
630	0
660	
690	
720	
750	
780	
810	
840	

Desta tabela retiramos os dados pedidos na questão,
A) 360
B) 840-630=210.

Obs:
Tudo o que foi feito para o carro mais lento, no lado esquerdo da ponte, e para o carro mais rápido, do lado direito, pode ser feito invertendo-se as posições dos carros. Da mesma forma, não consideramos fundamental a ordem em que os números foram escritos, tampouco se em forma de tabela.

Outra resposta possível.

A)

$x \rightarrow$ distância percorrida pelo automóvel mais lento

$y \rightarrow$ distância percorrida pelo automóvel mais rápido

$\frac{x}{y} = \frac{30}{40} \Leftrightarrow 4x = 3y \Leftrightarrow 4x - 3y = 0$ e $x + y = 840$.

Resolvendo o sistema, temos: $\begin{cases} x + y = 840 \\ 4x - 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 360$ e $y = 480$.

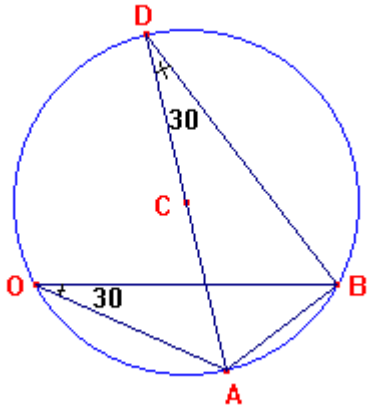
Como a metade da ponte se dá a 420 m, temos: $420 - 360 = 60$ m.
Portanto, eles se encontram a 60 m do meio da ponte.

Outra resposta possível.
B)
Como 40x = 30y, ou seja, 4x = 3y, então, quando y = 840, 4x = 3.840 = 2520.
Daí, x = 630, e, portanto, **faltam 840 – 630 = 210 m para o carro mais lento ultrapassar a ponte.**

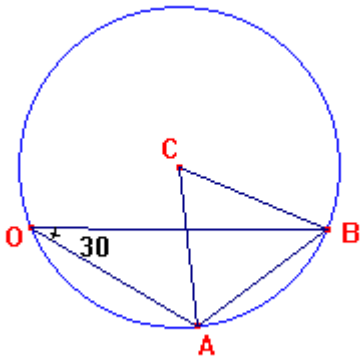
Questão 4
O desenho da figura abaixo, a citação (ou não) de que o triângulo ABD é retângulo e o uso da Lei dos senos resolve o problema, pois

AB --------- sen 30^0
AD ---------- sen 90^0

Como AD = 2R, sen 30^0 = ½ e sen 90^0 = 1, segue que AB = R.



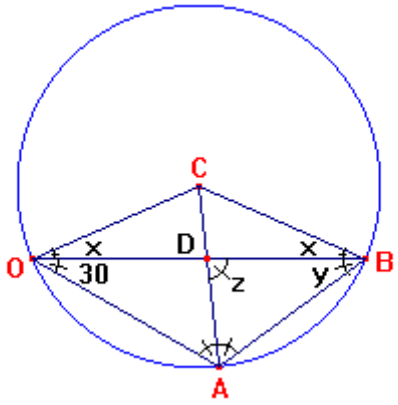
Q.4) Outra solução.



O ângulo C é igual a 60^0 por ser um ângulo central cujo ângulo inscrito correspondente mede 30^0. Como AC = BC = R, segue que o triângulo ABC é isósceles e, por conseguinte, os ângulos CAB e CBA são congruentes. Daí, e do fato de C medir 60^0, segue que CAB = CBA = 60^0, ou seja, o triângulo ABC é eqüilátero.
Portanto, AB = R.

Q.4) Outra resposta possível:

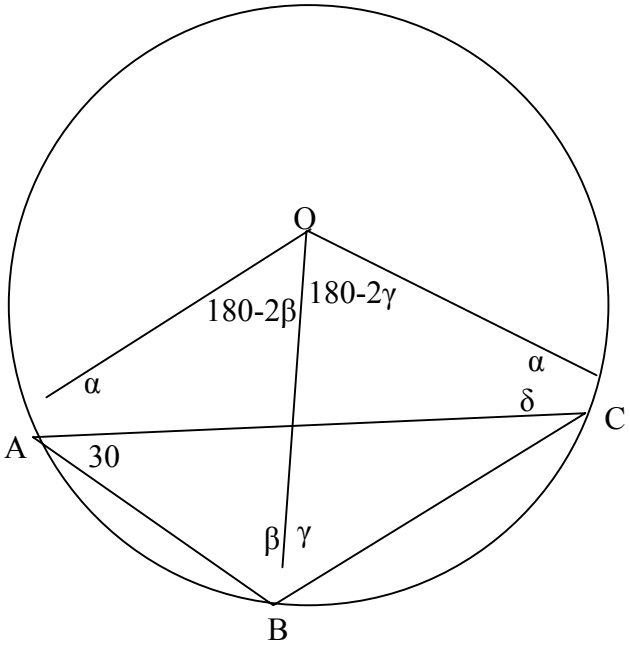
A partir da figura abaixo (um círculo de raio R), podemos deduzir que



Os triângulos OCB, OCA e ACB são isósceles, com OC = AC = CB = R. Como z é ângulo externo do triângulo ODA, segue que $z = 30^0 + (x + 30^0)$, ou seja, $z = 60^0 + x$. Por outro lado, z é ângulo interno do triangulo ADB e, assim, $z + y + (x + y) = 180^0$. Substituindo o z da primeira expressão na segunda expressão, obtemos $x + y = 60^0$. Como ACB é isósceles, o outro ângulo da base também mede 60^0 e, conseqüentemente, o terceiro ângulo mede 60^0.
Portanto, ACB é eqüilátero e AB = R.

Mais uma solução:

Ligando o centro do círculo aos pontos A, B e C, obtemos a figura abaixo.



Note que os triângulos AOB, BOC e AOC são triângulos isósceles, uma vez que dois dos seus lados são iguais ao raio do círculo. Num triângulo isósceles, sabemos que os ângulos da base são iguais; com isso, concluímos que:

$\alpha + \delta = \gamma$

Note também que

$180 - 2\beta + 180 - 2\gamma = 180 - 2\alpha \Rightarrow 90 + \alpha = \beta + \gamma$.

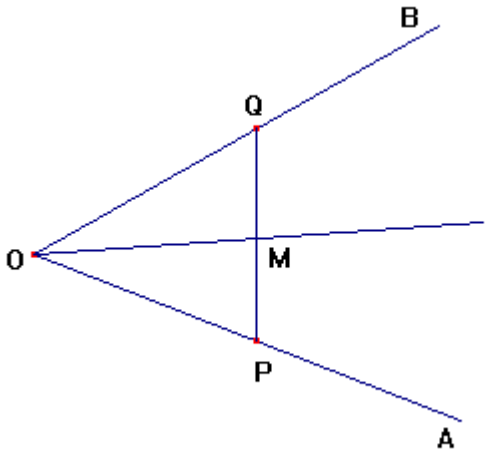
Outras conclusões que podemos extrair:

$30 + \beta + \gamma + \delta = 180$. Substituindo as duas equações anteriores nessa última, temos:
$30 + 90 + \alpha + \delta = 180 \Rightarrow 120 + \gamma = 180 \Rightarrow \gamma = 60$.

Ora, se $\gamma = 60$, isso implica que o triângulo OBC é, na verdade, eqüilátero, ou seja, que BC é também o raio, como se queria demonstrar. **Portanto, BC = R.**

Questão 5

Q.5.A) Esperava-se que o candidato apresentasse a figura abaixo.



B)

Note que o triângulo OQP foi construído de modo que OQ = OP, o que vai implicar ser o triângulo OQP isósceles. Num triângulo isósceles, a mediana é também altura e bissetriz. Só para relembrar, o segmento que liga um vértice ao ponto médio do lado oposto é a mediana.Como a bissetriz divide o ângulo em dois outros, congruentes, segue o resultado.

Portanto, o ângulo QOM é congruente ao ângulo MOP.

Outra solução:

B)

Depois da construção feita, temos que os triângulos QOM e POM são congruentes pelo caso LLL (OQ=OP, QM=MP e OM=OM), o que implica que o ângulo QOM é congruente ao ângulo MOP.

Obs: Outros casos de congruência poderiam ser citados (se justificados).

C) Como POQ = POM + MOQ e POM é congruente a MOQ, temos, então,que POQ = 2.POM. E , pela regra do seno do arco duplo, temos que

sen(2POM) = sen(POM + POM) = sen(POM)cos(POM)+ sen(POM)cos(POM) = 2sen(POM)cos(POM).

Sabemos que sen(POM) = 1/3 e que $sen^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1, \forall \alpha$.

Então, $sen^2(POM) + \cos^2(POM) = 1$, $\cos^2(POM) = 1 - sen^2(POM) = 1 - (1/3)^2 = 8/9$.

Assim, $\cos(POM) = \frac{\sqrt{8}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. **Portanto, sen(POQ)=** $2\frac{1}{3}\frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$**.**